



TITLE:

球バンドルのホモトピー群 (ホモトピー論研究会報告集)

AUTHOR(S):

岡, 七郎

CITATION:

岡, 七郎. 球バンドルのホモトピー群 (ホモトピー論研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1968, 50: 36-45

ISSUE DATE:

1968-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107735>

RIGHT:

球バンドルのホモトピー群

京大理 岡 七郎

§ 1. 序

[7]における $B(p)$ の一般化として、次のような cell complex

$$B_n(p) = S^{2n+1} \cup e^{2n+2p-1} \cup e^{4n+2p} \quad (B_1(p) = B(p) \text{ in [7]}) \quad n \geq 1$$

$$(1.1) \quad H^*(B_n(p); \mathbb{Z}_p) = \Lambda(u, f^!u) \quad \deg u = 2n+1$$

を考える。(p は > 2 は常に奇素数とする。) これは $S^{2n+2p-1}$ 上の S^{2n+1} -バンドルとして実現され、 $(2n+2p-1)$ -cell の attaching map (i.e. バンドル $B_n(p)$ の characteristic class) は

$$(1.2) \quad \alpha_1(2n+1) \in \pi_{2n+2p-1}(S^{2n+1}; p) \approx \mathbb{Z}_p$$

である。($\pi_i(\cdot; p)$ でホモトピー群の p -成分をあらわす。)

そこで $B_n(p)$ のホモトピー群の計算をし、classical group のホモトピー群へのお用を考えたい。

ホモトピー群の計算のため、バンドル $S^{2n+1} \xrightarrow{i} B_n(p) \xrightarrow{j} S^{2n+2p-1}$ のホモトピー完全系列の boundary 準同型

$$(1.3) \quad \partial_n : \pi_{i+1}(S^{2n+2p-1}) \rightarrow \pi_i(S^{2n+1})$$

をしらべろ。また (1.2) からあきらかに

$$(1.4) \quad \partial_n(S^2\gamma) = \alpha_{1(2n+1)} \circ S\gamma \quad \forall \gamma \in \pi_{i-1}(S^{2n+2p-2})$$

である。また、後の (1.7) の特別な場合として、

$$(1.5) \quad S^2 \circ \partial_n = \partial_{n+1} \circ S^2$$

が成り立つ。子像

$$(1.6) \quad f: S^2 B_n(p) \rightarrow B_{n+1}(p)$$

で、 f_* が $H_i(-; \mathbb{Z})$ $i < 4n+2p+2$ の同型になるものがあり、 $\Omega^2 f:$

$B_n(p) \rightarrow \Omega^2 B_{n+1}(p)$ の子像柱を考へることにより $B_n(p) \subset \Omega^2 B_{n+1}(p)$

と決まり $\Omega B_n(p) = \Omega(\Omega^2 B_{n+1}(p), B_n(p))$ とある。すると、

$$(1.7) \quad \begin{array}{ccccccc} \vdots & \downarrow p_* & \vdots & \downarrow p_* & \vdots & \downarrow p_* & \vdots & \downarrow p_* \\ \cdots & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+1}(S^{2n+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_i(S^{2n+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(B_n(p)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_i(S^{2n+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots \\ & & \downarrow S^2 & & \downarrow S^2 & & \downarrow f_* \circ S^2 & & \downarrow S^2 & & \\ \cdots & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+3}(S^{2n+2p+1}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_{i+2}(S^{2n+3}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i+2}(B_{n+1}(p)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i+2}(S^{2n+2p+1}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \cdots \\ & & \downarrow H^{(2)} & & \downarrow H^{(2)} & & \downarrow H^{(2)} & & \downarrow H^{(2)} & & \\ \cdots & \xrightarrow{j_*} & \pi_i(\Omega_2^{2n+2p-1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \pi_{i-1}(\Omega_2^{2n+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i-1}(\Omega B_n(p)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i-1}(\Omega_2^{2n+2p-1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \cdots \\ & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \\ \cdots & \xrightarrow{j_*} & \pi_i(S^{2n+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_{i-1}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i-1}(B_n(p)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{i-1}(S^{2n+2p-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots \\ & & \downarrow S^2 & & \downarrow S^2 & & \downarrow f_* \circ S^2 & & \downarrow S^2 & & \end{array}$$

なる可換で各行各列とも完全な図式がある。よって $\Omega_2^{2m+1} =$

$\Omega(\Omega^2 S^{2m+3}, S^{2m+1}) \quad m=0,1,2,\dots$ (1.7) の 1, 2, 4 列は別の完全系列

$$(1.8) \quad \cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^{2mp-1}; p) \xrightarrow{I'} \pi_{i-2}(\Omega_2^{2m-1}; p) \xrightarrow{I} \pi_{i+1}(S^{2mp+1}; p) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i-1}(S^{2mp-1}; p) \xrightarrow{I'} \cdots$$

とともに球面の unstable J-モットー群の p -成分の計算に使われ

るものである。([6], [8])

定理: $\beta_1(2np+1) \in \pi_{2np+2p(p+1)-1}(S^{2np+1}; p) \cong Z_p$ の生成元であると、

$$(1.9) \quad I \circ \partial_{n-1} \circ I'(S^2 \gamma) = x \cdot \beta_1(2np+1) \circ S^2 \gamma, \quad x \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \forall \gamma \in \pi_{-2}(S^{2np+1-2p-3}; p)$$

$\pi_{2m+1+R}(S^{2m+1}; p)$ は [8] において、 $R < 2(p^2+p)(p-1)-5$ の範囲で決定されており、その各生成元については、(1.4), (1.5), (1.7), (1.9) 及び Moore 空間の安定ホモトピー環における関係 ([9]) によりその ∂_n -image は決まる。群の拡大を求めるために補題 5, 補題 6 が使われる。その結果 $\pi_{2n+1+R}(B_n(p); p)$, $R < 2(p^2+p)(p-1)-5$ は

$$(1.10) \quad R = 2r(p-1)-2 \quad (r > p+2), \quad n \leq r-p-1 \quad (r=2p+1, p+1 \text{ のときは } n \leq r-p-1)$$

の場合とのかいて決定できる。(1.10) の場合は群の位数しか決まらないうが、(1.9) をより精密化すれば解決できる。この点は残されているであろう。

補用として、Classical group のホモトピー群に関し、[7] の拡張として次の C_p -同型が成り立つ。(\cong は C_p -同型、 $+$ は直和)

$$(1.11) \quad \pi_*(B_1(p)) + \pi_*(B_2(p)) + \cdots + \pi_*(B_n(p)) + \pi_*(S^{2np+1}) + \cdots + \pi_*(S^{2p-1}) \cong \pi_*(SU(n+p)) \quad n < p$$

$$(1.12) \quad \pi_*(B_1(p)) + \pi_*(B_3(p)) + \cdots + \pi_*(B_{2n+1}(p)) + \pi_*(S^{4np+3}) + \cdots + \pi_*(S^{2p-3}) \cong \pi_*(Sp(n + \frac{p+1}{2})) \quad n < \frac{p+1}{2}$$

これらと [2] の結果とを比較することより、 $\pi_*(SU(n))$, $\pi_*(Sp(n))$ をもうかき求めることも出来る。

§ 2. $B_n(p)$ の位数と性質

Stiefel 多様体によるバンドル $V_{2n+2,2}/S^{2n+1} = S^{2n+2}$ の、写像

$\alpha: S^{2n+2p-1} \rightarrow S^{2n+2}$, $\{a_j\} = \frac{1}{2} a_1(2n+2) \in \pi_{2n+2p-1}(S^{2n+2}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, v より誘

導 \bar{v} は \bar{v} の $B_n(p)$ である。 \bar{v} は \bar{v} の $V_{2n+3,2}$ の characteristic class

は $2 \cdot \bar{v}_{2n+1}$ であるから、(1.1), (1.2) は正しい。 (1.6) の f の存在は、

Stiefel において同様の写像 $f_1: S^2 V_{2n+3,2} \rightarrow V_{2n+5,2}$ の存在が知られて

いる。 f_1 は [3] における写像 $f: V_{m,R} * V_{n,R} \rightarrow V_{m+n,R}$ 知られてくる。

(1.7) は次の補題 1 において $F = \Omega^2 S^{2n+3}$, $E = \Omega^2 B_{n+1}(p)$, $B = \Omega^2 S^{2n+2p+1}$,

$F' = S^{2n+1}$, $E' = B_n(p)$, $B' = S^{2n+2p-1}$ において得られる。

補題 1 $(F, F'), (E, E'), (B, B') \in (CW)$ に対して $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, $F' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'}$

$\xrightarrow{p'} B'$ とともに fibering, $p|_{E'} = p'$ $\Omega^2(B, B') \rightarrow \Omega(F, F') \rightarrow \Omega(E, E')$

とある。このとき右の図式は

$$\begin{array}{ccccc} \Omega B' & \xrightarrow{p'} & F' & \xrightarrow{i'} & E' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega B & \xrightarrow{p} & F & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

ホモトピー可換で、各行、各

列はいつでも fibering と equivalent である。

$(\Omega p)_* : \pi_*(\Omega(E, F)) \rightarrow \pi_*(\Omega B)$ は同型であり、 Ωp はこの場合に

ホモトピー同値になる。そのホモトピー逆写像を用いて

(2.1) $p: \Omega B \rightarrow \Omega(E, F) \rightarrow F$

をつくる。 p' についても同様である。

Fibering $\Omega S^{2n+1} \rightarrow \Omega B_n(p) \rightarrow \Omega S^{2n+2p-1}$ は associate (cf. Serre の

spectral 系列) は collapse し、 $H^*(\Omega B_n(p); \mathbb{Z}_p) \cong H^*(\Omega S^{2n+1}; \mathbb{Z}_p) \otimes H^*(\Omega S^{2n+2p-1}; \mathbb{Z}_p)$

(2.2) $H^*(\Omega S^{2n+1}; \mathbb{Z}_p) = \{a_0=1, a_1, a_2, \dots\}$, $a_i \cdot a_j = \binom{i+j}{i} a_{i+j}$, $\deg a_i = 2ni$

$H^*(\Omega S^{2n+2p-1}; \mathbb{Z}_p) = \{b_0=1, b_1, b_2, \dots\}$, $b_i \cdot b_j = \binom{i+j}{i} b_{i+j}$, $\deg b_i = (2n+2p-2)i$

と \mathbb{Z}_p -basis とある。 σ は cohomology suspension として、

補題 2: $H^*(\Omega B_n(p); \mathbb{Z}_p) = \{x_0=y_0=1, x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots\}$, $\deg x_i = 2ni$, $\deg y_i = (2n+2p-2)i$ であり, non-zero 係数を無視して,

$$x_1 = \sigma u, \quad \partial^{p^m} x_{pm} = y_{pm}, \quad \partial^i x_{pm} = y_{pm} \quad (i > p^m)$$

が成り立つ。

証明は、 $H^*(\Omega B_n(p); \mathbb{Z}_p)$ の Hopf algebra 構造を記し、 σ の primitive element が x_i, y_i で生成される ([4] Prop. 3.12) を用いる。

$\partial^{p^m} x_{pm} = y_{pm}$, $\partial^i x_{pm}$ が primitive (従って $=0$ if $m > 0$) である

ことは m に関する帰納法で示す。 Z は homology ring $H_*(\Omega B_n(p); \mathbb{Z}_p)$

において dual 関係を示してよい。 $K_1 = S^{2n} \cup_{\alpha_1} e^{2n+2p-2}$, $Q(K_1) =$

$\varinjlim_N \Omega^N S^N K_1$ とし、(1.6) の f より、 $g: \Omega B_n(p) \rightarrow Q(K_1)$ で、 g_* が $H_*(; \mathbb{Z}_p)$

の同射となることを示す。 $H_*(Q(K_1); \mathbb{Z}_p)$ の構造 ([1]) と、 $\partial_*^{p^m}$ (= dual of ∂^{p^m}) の作用 ([5]) を知られる。

§ 3. 定理の証明

(1.8), (1.9) における I' は [8] による Σ の性質を用いる。

補題 3 ([8] lemma 2.5) $2mp-h \geq 6$, $Y_p^h = S^{h-1} \cup_p e^h$ とする。写

像 $G: Y_p^{2mp-h-2} \rightarrow \Omega^h \Omega_2^{2m-1}$ があり、 G^* は $H^{2mp-h-3}(\cdot; \mathbb{Z}_p)$ の同

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_i(S^{2mp-h-3}; p) & \xrightarrow{i_*} & \pi_i(Y_p^{2mp-h-2}; p) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_i(S^{2mp-h-2}; p) \\ \downarrow x \cdot S^{h+2} & & \downarrow G_* & & \downarrow y \cdot S^{h+3} \\ \pi_{i+h+2}(S^{2mp-1}; p) & \xrightarrow{I'} & \pi_{i+h}(\Omega_2^{2m-1}; p) & \xrightarrow{I} & \pi_{i+h+3}(S^{2mp+1}; p) \end{array}$$

型で有り、(3.1) は可換で有る。(for some $\lambda, \gamma \equiv 0 \pmod{p}$)

補題 4 : 写像 $h_p: \Omega S^{2m+1} \rightarrow \Omega S^{2mp+1}$ 有るで、 h_p^* は $H^{2mp}(\cdot; \mathbb{Z}_p)$

の同型で有り、次の図式が可換になる。

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{i+1}(S^{2m+1}; p) & \xrightarrow{\Omega} & \pi_i(\Omega S^{2m+1}; p) & \xrightarrow{h_p^*} & \pi_i(\Omega S^{2mp+1}; p) & \xleftarrow{\Omega} & \pi_{i+1}(S^{2mp+1}; p) \\ & & \searrow H^{(2)} & & \nearrow I & & \\ & & \pi_{i-2}(\Omega S^{2m-1}; p) & & & & \end{array}$$

1) \triangleright $\Omega B_n(p)$ の (2.1) の写像 $\rho_n: \Omega S^{2n+2p-1} \rightarrow S^{2n+1}$ と有るで、

$(\rho_n)_* \circ \Omega = \partial_n$ で有り、(1.5) より $\rho_n = \Omega^2 \rho_{n+1}|_{\Omega S^{2n+2p-1}}$ 有るで、

$Q_2(\rho_n): \Omega Q_2^{2n+2p-1} \approx \Omega(\Omega^3 S^{2n+2p+1}, \Omega S^{2n+2p-1}) \rightarrow \Omega(\Omega^2 S^{2n+3}, S^{2n+1}) = Q_2^{2n+1}$ 有るで、

有るで、 $Q_2(\rho_n)_* \circ \Omega = \bar{\partial}_n$ と有るで。 $g_1 = h_p \circ \rho_n: \Omega^2 S^{2n+2p-1} \rightarrow \Omega S^{2n+1}$ は

homotopic になるで、 $g_2: (\Omega^2 S^{2n+2p-1}, S^{2n+2p-3}) \rightarrow (\Omega S^{2n+1}, *)$ と有るで、

$g_3 = \Omega g_2: Q_2^{2n+2p-3} \rightarrow \Omega^2 S^{2n+1}$ 、 $g_4 = \Omega g_3: \Omega Q_2^{2n+2p-3} \rightarrow \Omega^3 S^{2n+1}$ と有るで、

$I \circ \bar{\partial}_{n+1} = \Omega^3 \circ g_4_* \circ \Omega$ 、 \exists $g_5: Y_p^{2np+2p(p-1)-2} \rightarrow S^{2np-1}$ で $g_3 \circ g \simeq i \circ g_5$

$i: S^{2np-1} \rightarrow \Omega^2 S^{2np+1}$ と有るで、 $g: Y_p^{2np+2p(p-1)-3} \rightarrow$

Y_p^{2np-2} 有るで、次の図式が可換になるで。

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccc} \Omega Q_2^{2n+2p-3} & \xrightarrow{g_4} & \Omega^3 S^{2np+1} \\ \uparrow g & \searrow Q_2(\rho_{n+1}) & \uparrow i \\ S^{2np+2p(p-1)-4} & \xrightarrow{g} & Y_p^{2np+2p(p-1)-3} & \xrightarrow{g} & Y_p^{2np-2} \\ \uparrow i & & \uparrow g & & \uparrow \pi \\ S^{2np+2p(p-1)-4} & \xrightarrow{g} & Y_p^{2np+2p(p-1)-3} & \xrightarrow{g} & Y_p^{2np-2} \end{array}$$

[9] K は \mathbb{Z} 、([9] の $\beta_S \varepsilon = \varepsilon$ は $\beta_S \varepsilon$ と有るで、)

$$(3.4) \quad \{g\} = x \cdot \beta(u) + y \cdot \alpha^p \delta + z \cdot \alpha^{p+1} \delta \alpha \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_p$$

と有るで、 $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ より定理が成るで、そのために $\pi \circ g$

の写像列で g が non-trivial で有るで、これは $\Omega \rho_n$ の写像列

で β^p が non-trivial であることがわかる。写像 $k: C_{2p} \rightarrow \Omega B_{n+1}$ と補題 2 を使って、 C_{2p} での β^p の non-triviality がわかる。
(3.4) の y.z 解決すれば、残った (1.10) の場合も解決できる。

§ 4. ホモトピー群の計算

$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1}; p)$ は [8] の Theorem 11.1, Theorem 15.1 および Theorem 15.2 により $k < 2(p^2+p)(p-1)-5$ の範囲で計算されしており、こゝでは、こゝで使われている記号をそのまま使うこととする。

[8] の各生成元に對し ∂n は次の通りである。($m = n+p-1$ とおく。)

- (4.1) i) $\partial n(\alpha_{2m+1}) = \alpha_1(2n+1)$
 ii) $\partial n(\alpha_r(2m+1)) = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_r(2n+1) & \begin{pmatrix} n=1 & r \not\equiv 0 \pmod{p} \\ n=2 & r \equiv -1 \pmod{p} \\ n=3 & r = p^2-1 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{その他 } r \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$
 iii) $\partial n(\alpha'_s(2m+1)) = \alpha_1 \alpha'_s(2n+1) \neq 0$ if $n=1$, $=0$ if $n>1$
 iv) $\partial n(\beta_r^s \beta_s(2m+1)) = \begin{cases} \alpha_1 \beta_r^s \beta_s(2n+1) & \text{下の場合以外 } r \geq 0, 1 \leq s < p \\ 0 & r = p-1, s=1, n > p^2-3 \text{ のとき} \end{cases}$
 v) $\partial n(\alpha_1 \beta_r^s \beta_s(2m+1)) = \alpha_1^2 \beta_r^s \beta_s(2n+1) \neq 0$ if $n=1$, $=0$ if $n>1$.
 vi) $\partial n(\varepsilon'_1(2m+1)) = \beta_1^{p+1}(2n+1)$ if $p=3$, $=0$ if $p>3$
 vii) $\partial n(\varepsilon'_i(2m+1)) = 0 \quad 1 < i < p-1$
 viii) $\partial n(\varepsilon_j(2m+1)) = \varepsilon_{j+1}(2n+1) \quad 1 \leq j < p-2$
 ix) $\partial n(\varepsilon_{p-2}(2m+1)) = 0$

- (4.2) i) $\partial n(p k \bar{\alpha}^{m+1}(\alpha_{r-m-1})) = 0 \quad n < r-p, r \not\equiv 0 \pmod{p}$
 ii) $\partial n(p k \bar{\alpha}^{m+1}(1)) = p k \bar{\alpha}^{n+1}(\beta_1) \quad n = r-p, r \not\equiv 0 \pmod{p}$

補題 6 : $h : Y_p^{R+L} \rightarrow Y_p^0$, $\alpha \in \pi_i(Y_p^{R+L})$, order of $\alpha = p$,
 $h_*(\alpha) = 0$ とし, $\tilde{\alpha} \in \pi_{i+1}(Y_p^L \cup_h C Y_p^{R+L})$, $\bar{\alpha} \in [Y_p^{L+1}, Y_p^{R+L}]$ とし
 $\bar{\alpha}$ は α の coextension, extension とある。ある $\gamma \in \pi_{i+1}(Y_p^L)$
 で、 $p \cdot \tilde{\alpha} = j_1 * \gamma$, $\pi_1^* \gamma = -h_* \bar{\alpha}$ とおけるものが存在する。
 $j_1 : Y_p^L \rightarrow Y_p^L \cup_h C Y_p^{R+L}$, $\pi_1 : Y_p^{L+1} \rightarrow S^{L+1}$.

証明は両方とも secondary composition の性質を使う。補題 5 は
 stable の場合に、補題 6 は (h として (3.3) の g とし、 τ)
 unstable の場合に、群の拡大を求めるために使われる。

最後に Classical group の応用として (1.11), (1.12) を証明し
 ておく。 $n < p$ とする。[7]にあるように写像 $f_n : S^{2n+1} \rightarrow SU(n+1)$
 で f_n^* が $H^{2n+1}(\cdot; \mathbb{Z}_p)$ の同型にたどるものがあつた。 $\pi_{4n+2p-2}(SU(n+p)) = 0$
 であるから $S^{2n+1} \xrightarrow{f_n} SU(n+1) \subset SU(n+p)$ は $g_n : K \rightarrow SU(n+p)$ に
 拡張でき、 g_n^* は $H^{2n+1}(\cdot; \mathbb{Z}_p)$, $H^{2n+2p-1}(\cdot; \mathbb{Z}_p)$ の同型である。[2]によれば、
 $\pi_{4n+2p-1}(SU(n+p); p) = 0$ 、 $\tau = \tau^* \pi_{4n+2p-1}(SU(n+p))$ の位数は p
 とし (p は素数)、 $B'_n(p) = K \cup_{\tau} e^{4n+2p}$ とする。これより、
 τ は $B_n(p)$ の $(4n+2p)$ -cell の attaching map である。あると、 g_n
 は $h_n : B'_n(p) \rightarrow SU(n+p)$ に拡張でき、 $h_1 \times h_2 \times \cdots \times h_n \times f_{n+1} \times \cdots \times f_{p-1} :$
 $B'_1(p) \times B'_2(p) \times \cdots \times B'_n(p) \times S^{2n+3} \times \cdots \times S^{2p-1} \rightarrow SU(n+p)$ は $H^*(\cdot; \mathbb{Z}_p)$ の同
 型を導く。 $h_n : B'_n(p) \rightarrow B_n(p)$ で $H^*(\cdot; \mathbb{Z}_p)$ の同型を導くものが
 あるから (1.11) の C_p -同型が成り立つ。 (1.12) についても全く同
 様である。

文献

- [1] E. Dyer & R.K. Lasnet : Homology of iterated loop spaces. *Ann. J. Math.* 84 (1964), 35 - 88.
- [2] H. Imanishi : Unstable homotopy groups of classical groups (odd primary components). *J. Math. Kyoto Univ.* 7 (1967) 221 - 243.
- [3] I.M. James : The intrinsic join : A study of the homotopy groups of Stiefel manifolds. *Proc. Lond. Math. Soc.* 8 (1958) 507 - 535.
- [4] J.W. Milnor & J.C. Moore : On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math.* 81 (1965) 211 - 264.
- [5] G. Nishida : Cohomology operations in iterated loop spaces. *Proc. Japan. Acad.* 44 (1968) 104 - 109.
- [6] H. Toda : On double suspension E^2 . *J. of Inst. Poly. Osaka City Univ.* 7 (1956) 103 - 145.
- [7] H. Toda : On homotopy groups of S^3 -bundles over spheres. *J. Math. Kyoto Univ.* 2 (1963) 193 - 207.
- [8] H. Toda : On iterated suspensions. I, II, III. *J. Math. Kyoto Univ.* 5 (1965) 87 - 142, 5 (1966) 204 - 250, 8 (1968) 101 - 130.
- [9] N. Yamamoto : Algebra of stable homotopy of Moore spaces. *J. Math. Osaka City Univ.* 14 (1963) 45 - 67.